

基于双稳态悬臂梁振动共振的微弱信号 增强机理及实验验证*

张云翔, 陈衍茂, 刘奇贤

中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107

摘要: 针对一种具有双稳态特性的磁耦合悬臂梁系统, 从理论分析与实验验证两个层面对其振动共振特性进行了研究。首先, 建立了双稳态悬臂梁系统的非线性动力学模型, 并采用快慢变量分离方法推导了系统低频响应的解析表达式, 从理论上揭示了高频激励诱发振动共振的内在机理。随后, 搭建了磁耦合双稳态悬臂梁实验平台, 在双频激励条件下开展实验研究。从实验结果可以清晰观测到振动共振现象, 且其变化规律与理论分析结果一致。本文从力学实验层面验证了振动共振在宏观结构中的可实现性, 同时为基于非线性动力学机制的微弱信号放大与检测提供了一种切实可行的研究思路。

关键词: 双稳态系统; 振动共振; 压电悬臂梁; 微弱信号放大

中图分类号: O32 文献标志码: A 文章编号: 2097-0137(XXXX)XX-0001-09

Mechanism and experimental verification of weak signal enhancement via vibrational resonance in bistable cantilever beams

Zhang Yunxiang, Chen Yanmao, Liu Qixian

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China

Abstract: This paper constructs a magnetic coupling cantilever beam system with bistable characteristics, and conducts a systematic study on its vibration resonance properties from both theoretical analysis and experiment. Firstly, a nonlinear dynamic model of the bistable cantilever beam system is established, and the analytical expression of the system's low-frequency response is derived using the fast-slow variable separation method. This theoretically reveals the intrinsic mechanism by which the high-frequency excitation modulates the slow variable to equivalent natural frequency and induces vibration resonance. Subsequently, a magnetic coupling bistable cantilever beam experimental platform is built, and experimental research is carried out under dual-frequency excitation conditions. The experimental results clearly observe the vibration resonance phenomenon, and its variation pattern is in good consistency with the theoretical analysis results. This paper validates the realizability of vibration resonance in macroscopic structures from the mechanical experiment perspective, and provides a practical research idea for weak signal amplification and detection based on the nonlinear dynamic mechanism.

Key words: bistable system; vibration resonance; piezoelectric cantilever beam; weak signal amplification

* 收稿日期: 2026-03-14

录用日期: 2026-04-14

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 深圳市科技计划 (JCYJ20250604175525033); 国家自然科学基金 (12572033)

作者简介: 张云翔 (2000 年生), 男; 研究方向: 非线性动力学; E-mail: zhangyx283@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘奇贤 (1989 年生), 男; 研究方向: 非线性动力学; E-mail: liuqx8@mail.sysu.edu.cn

全文阅读



ZR20260060

振动共振 (VR, vibrational resonance) 是一种典型的非线性动力学现象 (Landa et al., 2000)。其基本特征是在一个含有微弱低频信号的非线性系统中, 引入一个适当强度的辅助高频激励, 可以显著增强系统对低频信号的响应。这一现象在机制上类似于随机共振 (Gammaitoni et al., 1998; Wellens et al., 2004), 但 VR 利用确定性的周期信号替代了随机噪声。用于研究振动共振问题的经典解析方法之一是直接运动分离法 (DSM, direct separation of motion)。该方法基于系统响应中快、慢时间尺度显著分离的特性, 通过将运动分解为快速振荡分量与缓慢演化分量, 有效分析了系统在外部激励作用下对缓慢变化谐波信号的稳态响应行为。直接运动分离法尤其适用于振动共振问题中快慢耦合占主导的非线性动力学系统。在需要获得更高精度的解析结果, 通常还可引入其他成熟的非线性分析工具, 例如平均法、微扰法、多尺度法以及谐波平衡法等。但相比之下, 直接运动分离法具有推导过程简洁、物理图像清晰、计算复杂度较低等优点。因此, DSM 在振动共振研究领域中被广泛采用, 并逐渐发展为一种基础而有效的分析工具。

研究者利用直接运动分离法研究了多种非线性系统中的振动共振现象, 涵盖了具有单共振与多共振模式的广泛动力学模型。例如: 不同参数配置下具有五次势函数的非线性振子 (Jeyakumari et al., 2009; Yang et al., 2013; Wang et al., 2011)、耦合非谐振子系统 (Fang et al., 2012; Sarkar et al., 2019)、单向耦合双稳态系统 (Yao et al., 2010)、粗糙势系统 (Laoye et al., 2019)、Toda 势系统 (Kolebaje et al., 2021) 以及各类周期势系统 (Du et al., 2016; Roy-Layinde et al., 2023)。此外, 该方法还被成功推广至量子系统 (Ghosh et al., 2015; Olusola et al., 2020; Paul et al., 2021)、纳米机电系统 (Chowdhury et al., 2020) 等领域, 充分展示了直接运动分离法在振动共振研究中的普适性与理论价值。通过实验验证, 振动共振现象已先后非线性光学 (Madiot et al., 2021; Chizhevsky et al., 2021) 以及电子电路 (Jothimurugan et al., 2013) 等多个领域得到证实。然而, 有关宏观力学结构 (如具有几何非线性的悬臂梁系统) 的实验研究仍相对匮乏。通过力学调控实现稳定的双稳态特性, 并精确表征其在双频力信号作用下的增益演化, 尚缺乏系统的实验支撑。本文旨在填补振动共振实验研究方面的空白, 构建了一套基于磁耦合的双稳态悬臂梁系统, 从理论分析

与实验两个层面系统研究了振动共振现象。

1 双稳态悬臂梁系统的理论建模

1.1 模型概述

本文的双稳态悬臂梁系统由悬臂梁本体、安装于梁自由端的永磁体以及固定于支座上的永磁体组成。如图 1 所示, 两永磁体采用同极相对布置, 产生磁斥力作用于梁自由端, 在一定间距范围内可形成具有两个势阱的等效势能结构, 从而使系统呈现双稳态特性。在悬臂梁固定端粘贴有压电片, 利用压电材料的逆压电效应, 通过施加电压可在梁上产生可控的等效驱动力, 实现对系统的主动激励。此外, 还可对支座施加沿着 z 方向的激励, 基座运动通过固定端传递至悬臂梁, 从而构成一种外部激励形式。因此, 该系统可同时承受压电激励与基座激励, 实现双激励耦合作用。通过调节两永磁体之间的相对距离, 改变磁斥力的大小, 可以调控系统的等效势能形状与非线性刚度特性。

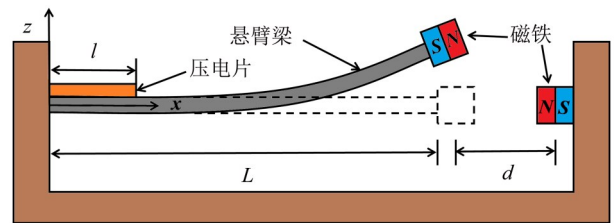


图 1 双稳态悬臂梁系统示意图

Fig.1 Schematic diagram of the bistable cantilever beam

1.2 拉格朗日函数推导

采用拉格朗日能量法, 建立悬臂梁的运动方程:

$$\mathcal{L} = T - U = T_b + T_p + T_m - U_b - U_p - U_m,$$

式中 T 为系统总动能; T_b 、 T_p 、 T_m 分别为金属基层的动能、压电层的动能和磁铁的动能; U 为系统总势能; U_b 、 U_p 、 U_m 分别为金属基层的势能、压电层的势能和磁铁互斥产生的磁势能。

其中

$$T_b + T_p = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b A_b \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p A_p \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 dx,$$

式中 ρ_b 、 ρ_p 为金属基层和压电层的密度; A_b 、 A_p 为金属基层和压电层的横截面积; w 为悬臂梁的挠度; $\dot{z}(t)$ 为支座的振动速度。

磁铁的动能 T_m 为

$$T_m = \frac{1}{2} m_{\text{mag}} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t \partial x} \right]^2,$$

式中 m_{mag} 为磁铁的质量; I 为磁铁的转动惯量; $\frac{\partial w(L, t)}{\partial t}$ 表示悬臂梁在 $x = L$ 处的速度; $\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t \partial x}$ 表示悬臂梁在 $x = L$ 处的角速度。

势能的计算采用欧拉-伯努利梁理论, 梁在点 (x, z) 处的轴向应变 S 可以表示为

$$S(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}.$$

金属基层的势能 U_b 和压电层的势能 U_p 为

$$\begin{aligned} U_b + U_p &= \frac{1}{2} \int_{V_b} \sigma_b S_b dV_b + \frac{1}{2} \int_{V_p} \sigma_p S_p dV_p \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_b} E_b S_b^2 dV_b + \frac{1}{2} \int_{V_p} E_p S_p^2 dV_p \\ &= \frac{1}{2} E_b I_b \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} E_p I_p \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \end{aligned}$$

式中 E_b 、 E_p 分别为金属基层和压电层的杨氏模量; I_b 、 I_p 分别为金属基层和压电层相对于悬臂梁中性轴的截面惯性矩。

两互斥磁铁之间的非线性磁力通过磁偶极子模型计算。根据唐炜等(2014)的推导, 磁势能为

$$U_m = \frac{\mu_0 M_A V_A M_B V_B \left[-w(L, t)^2 + 2d^2 - 3dw(L, t)w'(L, t) \right]}{4\pi \sqrt{w'(L, t)^2 + 1} \left[w(L, t)^2 + d^2 \right]^{2.5}},$$

式中 μ_0 为磁导率常数; M_A 、 M_B 分别为磁铁 A、B 的磁化强度; V_A 、 V_B 分别为磁铁 A、B 的体积; d 为两磁铁间的距离; $w(L, t)$ 表示悬臂梁在 $x = L$ 处的挠度, $w'(L, t)$ 表示悬臂梁在 $x = L$ 的转角。

因此, 拉格朗日函数可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b A_b \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p A_p \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} m_{\text{mag}} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t \partial x} \right]^2 \quad (1) \\ &- \frac{1}{2} E_b I_b \int_0^L \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \\ &- \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^L \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx - U_m, \end{aligned}$$

使用伽辽金法对拉格朗日函数进行离散, 将挠

度 $w(x, t)$ 表示为前 N 阶模态阵型的线性组合:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t),$$

式中 $\phi_i(x)$ 为第 i 阶模态振型, $q_i(t)$ 为广义模态坐标。

由于振动共振现象是在小幅振动情况下发生, 悬臂梁的位移响应可以近似为一阶模态振型。为了便于分析, 将挠度简化为

$$w(x, t) = \phi(x) q(t),$$

式中 $\phi(x)$ 表示第一阶模态, $q(t)$ 表示其广义模态坐标。

将模态展开式代入式(1)中, 并将式中的平方项展开, 可得到离散后的拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b A_b \left[\dot{q}(t)^2 \phi(x)^2 + 2\dot{q}(t) \phi(x) \dot{z}(t) + \dot{z}(t)^2 \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p A_p \left[\dot{q}(t)^2 \phi(x)^2 + 2\dot{q}(t) \phi(x) \dot{z}(t) + \dot{z}(t)^2 \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} m_{\text{mag}} \left[\dot{q}(t)^2 \phi(L)^2 + 2\dot{q}(t) \phi(L) \dot{z}(t) + \dot{z}(t)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} I \dot{q}(t)^2 \phi'(L)^2 - \frac{1}{2} E_b I_b \int_0^L q(t)^2 \phi''(x)^2 dx \\ &- \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^L q(t)^2 \phi''(x)^2 dx - U'_m, \end{aligned}$$

其中

$$U'_m = \frac{\mu_0 M_A V_A M_B V_B}{4\pi} \times \frac{q(t)^2 \phi(L)^2 + 2d^2 - 3d\phi(L)\phi'(L)q(t)^2}{\sqrt{q(t)^2 \phi'(L)^2 + 1} \left[q(t)^2 \phi(L)^2 + d^2 \right]^{2.5}}. \quad (2)$$

令 $\kappa = \frac{\mu_0 M_A V_A M_B V_B}{4\pi}$, 以 $q(t)^2$ 为自变量, 对式(2)进行泰勒级数展开, 可得:

$$U'_m = k_0 + \frac{1}{2} k_1 q(t)^2 + \frac{1}{4} k_2 q(t)^4,$$

其中

$$\begin{cases} k_0 = \frac{2\kappa}{d^3}, \\ k_1 = \frac{\kappa \left[-12\phi(L)^2 - 2d^2 \phi'(L)^2 - 6d\phi(L)\phi'(L) \right]}{d^5}, \\ k_2 = \frac{12\kappa \left[3.75\phi(L)^4 + 0.25d^4 \phi'(L)^4 \right]}{d^7} \\ + \frac{12\kappa d^2 \phi(L)^2 \phi'(L)^2}{d^7} \\ + \frac{12\kappa \left[0.5d^3 \phi(L)\phi'(L)^3 + 2.5\phi(L)^3 \phi'(L) \right]}{d^7}. \end{cases}$$

1.3 动力学模型建立

考虑系统中阻尼与外部激励等非保守作用,系统满足如下拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F(t),$$

式中 $F(t)$ 为广义耗散力。根据拉格朗日方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -q(t) \left[E_b I_b \int_0^L \phi''(x)^2 dx + E_p I_p \int_0^l \phi''(x)^2 dx \right] - k_1 q(t) - k_2 q(t)^3.$$

令

$$\begin{cases} m_1 = \int_0^L \rho_b A_b \phi(x)^2 dx \\ \quad + \int_0^l \rho_p A_p \phi(x)^2 dx + m_{\text{mag}} \phi(L)^2 + I \phi'(L)^2, \\ m_2 = \int_0^L \rho_b A_b \phi(x) dx + \int_0^l \rho_p A_p \phi(x) dx + m_{\text{mag}} \phi(L), \\ k = E_b I_b \int_0^L \phi''(x)^2 dx + E_p I_p \int_0^l \phi''(x)^2 dx, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) &= \ddot{q}(t) \left[\int_0^L \rho_b A_b \phi(x)^2 dx + \int_0^l \rho_p A_p \phi(x)^2 dx \right] \\ &\quad + \ddot{q}(t) \left[m_{\text{mag}} \phi(L)^2 + I \phi'(L)^2 \right] \\ &\quad + \ddot{z}(t) \left[\int_0^L \rho_b A_b \phi(x) dx + \int_0^l \rho_p A_p \phi(x) dx \right] \\ &\quad + m_{\text{mag}} \phi(L) \ddot{z}(t), \end{aligned}$$

得系统动力学方程为

$$m_1 \ddot{q}(t) + m_2 \ddot{z}(t) + (k + k_1) q(t) + k_2 q(t)^3 = F(t). \quad (3)$$

式(3)中的 $F(t)$ 包含两部分:一部分是悬臂梁存在的结构阻尼产生的阻尼力,阻尼力与广义速度成正比,即 $\zeta \dot{q}(t)$;另一部分是压电片提供的压电驱动力 F_p 。根据逆压电效应,压电片在通电的情况下,会产生 x 方向的应力,从而导致纵向变形。且,由于压电片与悬臂梁粘连,纵向变形会对悬臂梁产生弯矩,驱动悬臂梁发生弯曲变形。

压电片在通电情况下,产生的纵向应力为

$$\sigma(x, t) = \frac{E_p d_{31} V(x, t)}{\tau_p},$$

式中 E_p 是压电片的杨氏模量; d_{31} 是压电耦合系数; τ_p 是压电片的厚度; V 是施加给压电片的电压。

对整个压电片的纵向应力进行积分,得到压电片对悬臂梁的弯矩作用为

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \int_{\frac{\tau_b}{2}}^{\frac{\tau_b}{2} + \tau_p} \sigma(x, t) b z dz \\ &= \frac{1}{2} E_p d_{31} V(x, t) b (\tau_b + \tau_p) = C_p V(x, t), \end{aligned}$$

式中 τ_b, τ_p 分别为金属基层的厚度和压电片的厚度,

$$C_p = \frac{1}{2} E_p d_{31} b (\tau_b + \tau_p).$$

在 $0 < x < l$ 时,压电片的电压为常数;在 $l < x < L$ 时,压电片的电压为 0。即

$$V(x, t) = [h(x) - h(x - l)] V(t),$$

式中 $h(x)$ 为阶跃函数。

由弯矩产生的驱动力为

$$\begin{aligned} F_L &= \int_0^L \phi(x) \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx \\ &= \int_0^L \phi(x) C_p \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} dx \\ &= \int_0^L \phi(x) C_p [h''(x) - h''(x - l)] V(t) dx \\ &= C_p [\phi'(l) - \phi'(0)] V(t). \end{aligned}$$

将阻尼和压电驱动力代入上式,可得系统动力学方程为

$$\ddot{q}(t) + \delta \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) + \beta q(t)^3 = F \cos(\Omega t) + f \cos(\omega t), \quad (4)$$

$$\text{其中 } \delta = \frac{s}{m_1}, \omega_0^2 = \frac{(k + k_1)}{m_1}, \beta = \frac{k_2}{m_1}, F = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{z}, f = \frac{C_p [\phi'(l) - \phi'(0)] V}{m_1}.$$

方程(4)是一个 Duffing 方程形式的非线性方程,非线性项由磁斥力导致产生。当 $\omega_0^2 < 0, \beta > 0$ 时,系统为双稳态系统。系统有两个激励输入,一个是频率为 Ω 、幅值为 F 的支座振动力;一个是频率为 ω 、幅值为 f 的压电驱动力。规定 $\Omega > \omega$, 即支座振动力为高频激励,压电驱动力为低频激励。

2 理论分析

当两个激励的频率不一致且满足 $\Omega > \omega$ 时,二者具有不同的时间尺度。因此,采用快慢变量分离法对非线性方程进行求解,将 $q(t)$ 分解为快变量的运动 $\psi(t)$ 和慢变量的运动 $X(t)$,代入式(4)可得:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \ddot{\psi} + \delta \dot{X} + \delta \dot{\psi} + \omega_0^2 X + \omega_0^2 \psi + \beta X^3 + 3\beta X^2 \psi + 3\beta X \psi^2 + \beta \psi^3 \\ = F \cos(\Omega t) + f \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

在快变量线性方程中寻找 $\psi(t)$ 的近似解: $\ddot{\psi} + \delta \dot{\psi} + \omega_0^2 \psi = F \cos(\Omega t)$, 可得:

$$\psi = \frac{F}{\mu} \cos(\Omega t - \Theta), \quad (6)$$

式中 $\mu = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2}$, Θ 为快变量输入与输出的相位差。

将式(6)代入式(5)中,在 $[0, 2\pi/\Omega]$ 内对所有项进行平均,消去快变量得到慢变量运动:

$$\ddot{X} + \delta\dot{X} + CX + \beta X^3 = f \cos(\omega t), \quad (7)$$

式中 $C = \omega_0^2 + 3\beta F^2/(2\mu^2)$ 。

当 $f = 0$ 时,式(7)中可能存在的平衡点为

$$X^* = 0, \quad X_{\pm}^* = \pm \sqrt{-\frac{C}{\beta}}.$$

慢变量运动 $X(t)$ 表现为围绕平衡点的振荡,考虑其周期成分,引入变换 $Y = X - X^*$,消去非线性项,可得到慢变量周期运动方程为

$$\ddot{Y} + \delta\dot{Y} + \omega_r^2 Y = f \cos(\omega t), \quad (8)$$

式中 $\omega_r^2 = C + 3\beta X^{*2}$ 。可解得:

$$Y = \frac{f}{\lambda} \cos(\omega t - \theta),$$

式中 $\lambda = \sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2}$, θ 为快变量输入与输出的相位差。响应增幅 Q 为

$$Q = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2}}.$$

从整个推导过程可以发现,快变量运动对慢变量运动产生影响的根源体现在式(8)中,其中 ω_r 可视为慢变量运动的等效固有频率。当系统处于双稳态时, $\omega_0^2 < 0$, 其平衡解为 $X^* = \pm\sqrt{-C/\beta}$, 因此 $\omega_r^2 = C + 3\beta X^{*2} = -2C = -2\omega_0^2 - 3\beta F^2/\mu^2$ 。随着高频激励幅值 F 的增大,慢变量运动的等效固有频率 ω_r 从初始值 $\sqrt{-2\omega_0^2}$ 开始逐渐减小,当 ω_r 降低并接近低频激励频率 ω 时,系统将发生共振现象。

由上可知,振动共振现象产生的原因在于:在非线形系统中,快变量运动会通过非线性耦合改变慢变量运动的等效固有频率,当该等效固有频率与低频外激励频率相匹配时,系统发生共振,从而导致低频激励响应幅值显著放大。

$f = 0.1, \omega = 1, \Omega = 10, \delta = 1.4, \beta = 1, \omega_0^2 = -1$ 的条件下,使用快慢变量分离方法获得的系统低频响应幅值增益 Q ,如图2所示。在相同参数条件下,对系统动力学方程进行数值求解,计算在相同高频激励幅值范围内系统的低频响应幅值增益。结果表明,理论分析结果与数值模拟具有良好的一致性,从而验证了快慢变量分离方法在描述该系统振动

共振特性方面的有效性。

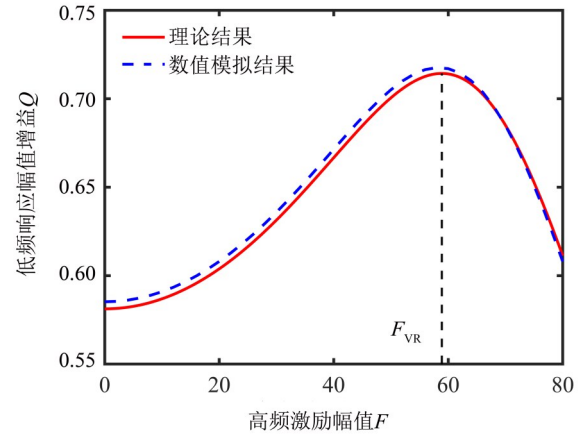


图2 振动共振现象的理论推导与数值模拟结果

Fig. 2 Theoretical and numerical results of the vibrational resonance

3 实验验证

3.1 实验平台

本文所构建的双稳态悬臂梁实验平台,如图3所示。该实验系统主要由信号发生器、两台信号放大器、激振器、激光测振仪、信号采集器以及用固定悬臂梁的支座组成。为抵消悬臂梁自身重力以及末端磁铁重力对振动的影响,将悬臂梁支座竖直放置于光滑滑轨上。信号发生器可同时输出两路独立电信号,分别经由两台信号放大器进行功率放大,信号放大器(a)连接至压电片,用于对悬臂梁施加低频激励,信号放大器(b)连接至激振器,用于对支座施加高频激励。

悬臂梁自由端的位移响应由激光测振仪进行非接触式测量。测得的位移信号传输至信号采集器,经模数转换后输入计算机,并通过配套软件进行实时显示与数据存储。

3.2 振动共振现象

在开展双频激励实验之前,需要准确确定系统的固有频率,以合理选取低频激励频率与高频激励频率。系统固有频率通常可通过自由衰减法和扫频激励法两种途径实现。

选取图3(b)中材质为黄铜,长度为80 mm的悬臂梁作为研究对象,并在悬臂梁自由端和支座对应位置引入一对互斥磁铁,以构造双稳态势能结构,使梁末端产生约10 mm的静态偏位移。在上述实验配置下,利用激振器对系统施加扫频激励,记录悬臂梁的动态响应。对扫频实验获得的时域响应

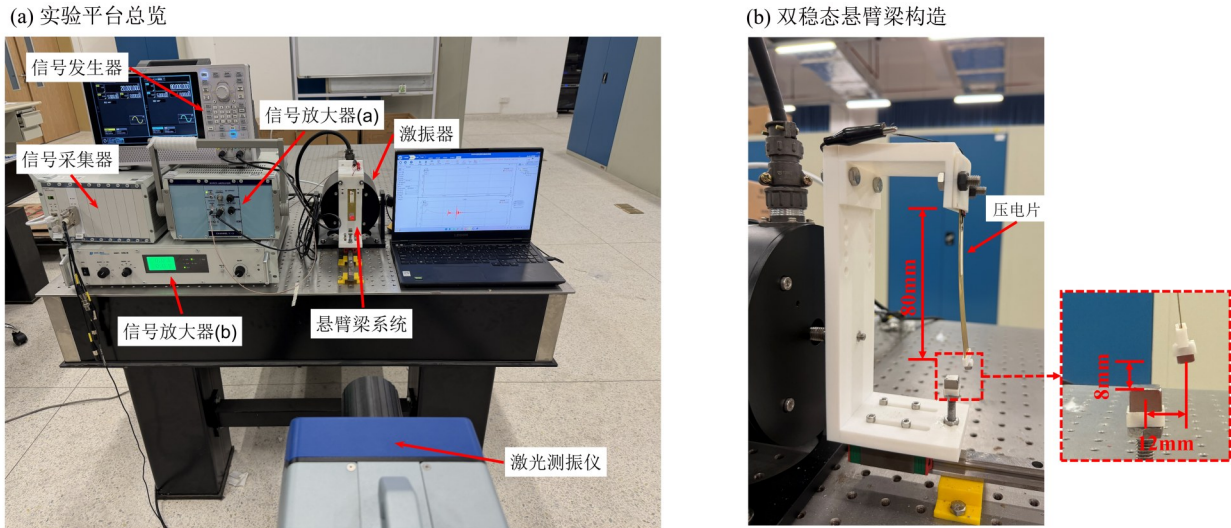


图3 实验平台及双稳态悬臂梁系统

Fig. 3 Schematics of the experimental platform and the bistable cantilever beam

数据进行傅里叶变换处理,提取系统在各激励频率下的响应幅值,从而得到系统的幅频响应曲线。根据实验数据拟合结果,可确定系统的固有频率约为 30.6 Hz。实验数据及相应的拟合结果如图 4 所示。

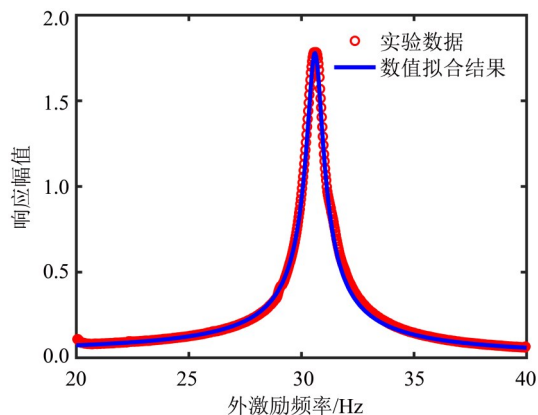


图4 外激励扫频下的系统响应与数值拟合结果

Fig. 4 System response under external excitation frequency sweeping and the corresponding numerical fitting results

将低频激励频率设置为 29 Hz,以接近系统的等效固有频率区间;同时,将高频激励频率设定为 40 Hz,用于调制系统的慢变量动力学特性。实验过程中,双通道信号同步开启,分别对应低频和高频激励输入。通过调节信号放大器(b)的旋钮,实现对高频激励幅值 F 的连续、可控调节,而低频激励参数保持不变。

图 5(a)呈现了加载过程中的时域响应曲线。在整个实验过程中,高频激励的幅值随时间均匀增大。从时域响应可以观察到,系统整体振动幅值呈

现出先增大后减小的变化趋势。当时间为 70 s 时,位移衰减速率明显减缓。这是由于随着高频激励幅值的增加,高频分量在系统响应中的贡献逐渐增强,一定程度上补偿了低频响应的衰减。然而,通过傅里叶分解可以发现,在该时间区间低频信号的响应实际上已经衰减至较小水平。图 5(b)展示了对该时域信号进行傅里叶分解后的结果,并给出了低频响应(29 Hz)和高频响应(40 Hz)随时间变化的全过程。从图中可以看出,高频响应幅值随时间呈近似均匀增长趋势,这表明时间与高频激励幅值之间具有正相关关系。随着高频激励幅值的逐渐增大,低频响应幅值表现出明显的先增强后减弱的变化特征,呈现出典型的共振型演化规律,即振动共振现象。

3.3 高频激励频率对振动共振的影响

在其他实验条件不变的情况下,改变高频激励频率 Ω ,研究低频响应增幅 Q 与高频激励幅值 F 之间的关系。理论分析结果中,当系统参数保持不变时,随着高频激励频率 Ω 的增大,低频响应达到共振状态所需的高频激励幅值 F 也随之增大;然而,单纯改变高频激励频率 Ω 并不会改变低频响应增幅 Q 的最大值。

图 6~7 为三种不同高频激励频率(40、45、50 Hz)下的系统响应时域图和低频响应幅值增益曲线。理论结果与实验结果均表明,在高频激励作用下,系统的低频响应幅值能够得到显著增强,其最大响应幅值可达到原始低频激励响应的 4~5 倍。随着高频激励频率的逐渐提高,低频响应的共振曲线

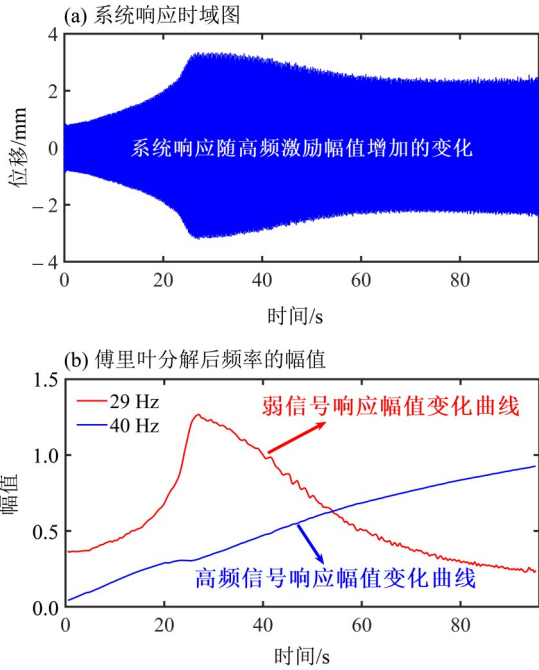


图5 振动共振现象的实验结果

Fig.5 Experimental results of the vibrational resonance

整体呈现向右偏移的趋势,即系统达到共振状态时所需的高频激励幅值随之增大。同时,共振峰值幅度基本保持不变,而共振曲线的开口程度则逐渐增大。上述实验现象与理论推导所得到的结果具有良好的 consistency。

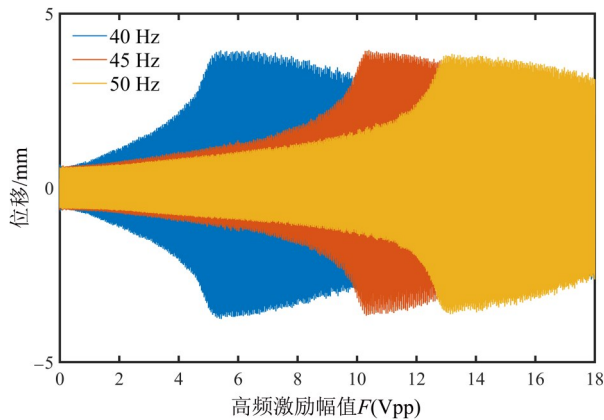


图6 不同高频激励频率下的系统响应时域图

Fig.6 Time-domain responses of the system under different high-frequency excitation frequencies

3.4 低频激励频率对振动共振的影响分析

保持高频激励频率 $\Omega = 40$ Hz不变,改变低频激励频率 ω ,研究低频响应增幅与高频激励幅值 F 之间的关系。理论分析中,在高频激励频率固定的前提下,当低频激励频率满足 $\omega < \sqrt{-2\omega_0^2}$ 时, ω 越小,低频响应达到共振所需要的高频激励 F 就越

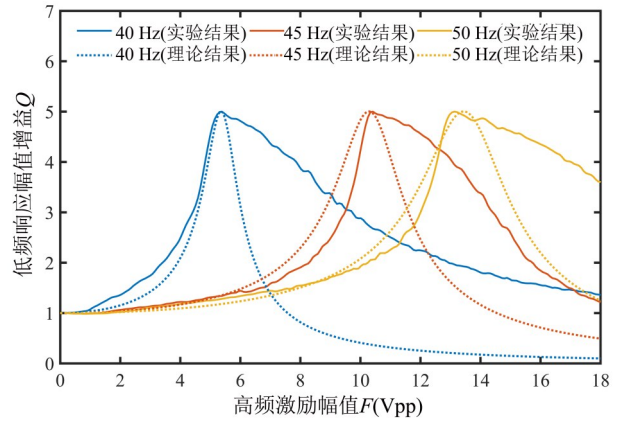


图7 不同高频激励频率下低频响应幅值增益曲线

Fig.7 Gain curves of the low-frequency response amplitude under different high-frequency excitation frequencies

大。这是因为低频共振的发生需要让慢变量运动的等效固有频率 ω_r 从初值 $\sqrt{-2\omega_0^2}$ 降低至 ω ; ω 越小时,对应的频率变化量 $\Delta\omega$ 越大,因此需要更强的高频激励才能实现。同时,低频响应在达到共振时的增幅 $Q_{max} = 1/\delta\omega$,因此随着低频激励频率 ω 的降低,达到共振时低频响应增幅 Q 的最大值还将进一步增大。

图8~9展示了不同低频激励频率(26、25、24 Hz)下的系统响应时域图和低频响应幅值增益曲线。通过对比可以发现,随着低频激励频率的逐渐降低,低频响应的共振曲线整体向右偏移,即系统达到共振状态所需的高频激励幅值逐渐增大;同时,共振峰值 Q_{max} 呈现上升趋势,由最初的4~5倍,提升至8~10倍,这表明系统对更低频的信号,能够实现更显著的放大效果。

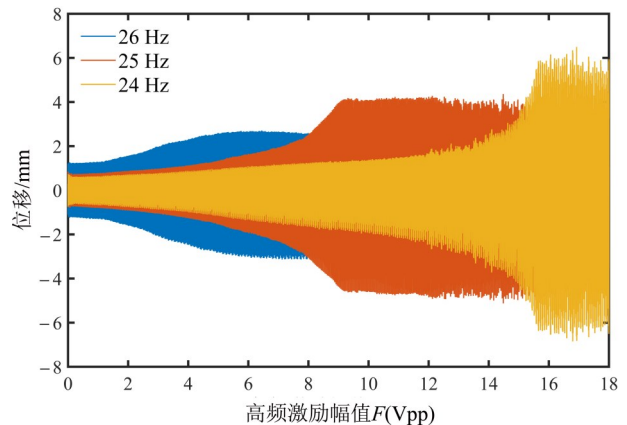


图8 不同低频激励频率下的系统响应时域图

Fig.8 Time-domain responses of the system under different low-frequency excitation frequencies

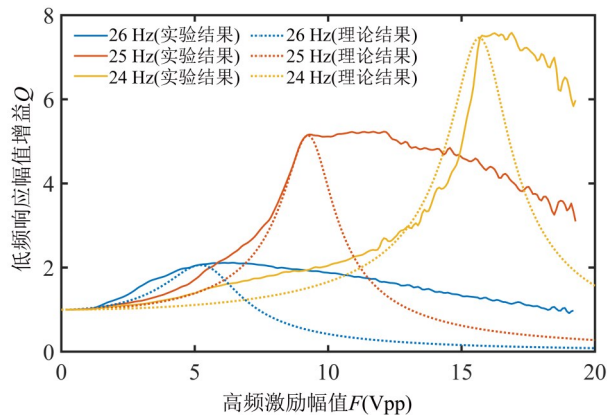


图9 不同低频激励频率下低频响应幅值增益曲线

Fig.9 Gain curves of the low-frequency response amplitude under different low-frequency excitation frequencies

4 结 论

针对非线性系统中的振动共振现象,构建了一套磁耦合双稳态悬臂梁动力学系统,系统研究了其在双频信号激励作用下的动力学响应特性。主要结论如下:

1) 基于具有双稳特征的非线性势能结构,利用拉格朗日能量法并结合逆压电效应与基座激励,建立了磁耦合双稳态悬臂梁在双频驱动条件下的非线性动力学模型。采用快慢变量分离法,对系统响

应进行近似解析,推导得到了低频响应增益的解析表达式。理论分析表明,振动共振的本质在于:高频激励通过非线性耦合作用改变了慢变量运动的等效固有频率,当该等效固有频率与低频激励频率相匹配时,系统发生共振,从而实现了低频微弱信号的显著放大。

2) 基于所提出的理论模型,自主搭建了磁耦合双稳态悬臂梁实验平台,并成功观测到振动共振现象。

3) 通过改变激励参数,对振动共振的调控规律进行了深入研究。结果表明:随着高频激励频率 Ω 的增大,低频响应达到共振时所需的高频激励幅值 F 随之增加,但共振峰值基本保持不变;在高频激励频率固定的情况下,低频激励频率 ω 越小,越偏离系统初始固有频率,系统达到共振时所需的高频激励幅值 F 越大。然而,由于低频响应增益峰值满足 $Q_{\max} = 1/\delta\omega$,较低的低频激励频率能获得更高的信号放大倍数。

4) 本文在宏观力学结构中实现了振动共振现象,丰富了非线性动力学中振动共振的实验研究体系。理论分析与实验结果之间表现出良好的一致性,验证了所建模型及解析方法的有效性。因此,研究成果在传感器开发与机械振动能量利用等领域具有潜在的应用价值和推广前景。

参考文献:

- 唐炜,王小璞,曹景军,2014. 非线性磁式压电振动能量采集系统建模与分析[J]. 物理学报, 63(24): 240504.
- Bordet M, Morfu S, 2012. Experimental and numerical enhancement of vibrational resonance in neural circuit [J]. Electron Lett, 48(15): 903-905.
- Chizhevsky V N, 2021. Amplification of optical signals in a bistable vertical-cavity surface-emitting laser by vibrational resonance [J]. Phil Trans R Soc A, 379 (2192): 20200241.
- Chowdhury A, Clerc M G, Barbay S, et al, 2020. Weak signal enhancement by nonlinear resonance control in a forced nano-electromechanical resonator [J]. Nat Commun, 11(1): 2400.
- Du L C, Song W H, Guo W, et al, 2016. Multiple current reversals and giant vibrational resonance in a high-frequency modulated periodic device [J]. EPL Europhys Lett, 115(4): 40008.
- Fang C J, Liu X B, 2012. Theoretical analysis on the vibrational resonance in two coupled overdamped anharmonic oscillators [J]. Chin Phys Lett, 29 (5) : 050504.
- Gammaitoni L, HäNggi P, Jung P, et al, 1998. Stochastic resonance [J]. Rev Mod Phys, 70(1): 223-287.
- Ghosh S, Ray D S, 2015. Optical Bloch equations in a bichromatic field; vibrational resonance [J]. Eur Phys J B, 88(1): 23.
- Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, et al, 2009. Single and multiple vibrational resonance in a quintic oscillator with monostable potentials [J]. Phys Rev E, 80 (4): 046608.
- Jothimurugan R, Thamilaran K, Rajasekar S, et al, 2013. Experimental evidence for vibrational resonance and enhanced signal transmission in chua's circuit [J]. Int J Bifurcation Chaos, 23(11): 1350189.
- Kolebaje O, Popoola O O, Vincent U E, 2021. Occurrence of vibrational resonance in an oscillator with an asymmetric Toda potential [J]. Phys D Nonlinear Phenom, 419: 132853.

- Landa P S, McClintock P E, 2000. Vibrational resonance[J]. *J Phys A: Math Gen*, 33(45): 433–438.
- Laoye J A, Roy-Layinde T O, Omoteso K A, et al, 2019. Vibrational resonance in a higher-order nonlinear damped oscillator with rough potential[J]. *Pramana*, 93(6): 102.
- Madiot G, Barbay S, Braive R, 2021. Vibrational resonance amplification in a thermo-optic optomechanical nanocavity[J]. *Nano Lett*, 21(19): 8311–8316.
- Monwanou A V, KoukpéMèDji A A, Ainamon C, et al, 2020. Nonlinear dynamics in a chemical reaction under an amplitude-modulated excitation: Hysteresis, vibrational resonance, multistability, and chaos [J]. *Complexity*, 2020: 8823458.
- Olusola O I, Shomotun O P, Vincent U E, et al, 2020. Quantum vibrational resonance in a dual-frequency-driven Tietz-Hua quantum well[J]. *Phys Rev E*, 101(): 052216.
- Paul S, Shankar R D, 2021. Vibrational resonance in a driven two-level quantum system, linear and nonlinear response [J]. *Phil Trans R Soc A*, 379(2192): 20200231.
- Roy-Layinde T O, Omoteso K A, Kolebaje O T, et al, 2023. Vibrational resonance in a multistable system with position-dependent mass [J]. *Commun Theor Phys*, 75(11): 115602.
- Sarkar P, Ray D S, 2019. Vibrational antiresonance in nonlinear coupled systems [J]. *Phys Rev E*, 99(5): 052221.
- Wang C J, 2011. Vibrational resonance in an overdamped system with a sextic double-well potential[J]. *Chin Phys Lett*, 28(9): 090504.
- Wellens T, Shatokhin V, Buchleitner A, 2004. Stochastic resonance[J]. *Rep Prog Phys*, 67(1): 45.
- Yang Y F, Wang C J, 2013. Theory and numerics of double-vibrational resonance in the overdamped oscillator [J]. *Chin J Phys*, 51(4): 728–737.
- Yao C, Zhan M, 2010. Signal transmission by vibrational resonance in one-way coupled bistable systems [J]. *Phys Rev E, Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 81(6): 061129.

(责任编辑 王海蓉)